

УДК 621.774.36, 621.771.011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТРУБЫ ПРИ ПРОКАТКЕ НА ПИЛИГРИМОВОМ ПРОКАТНОМ СТАНЕ

М.И. Гозман

*АО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт
неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара», Москва*

В работе представлена математическая (полуаналитическая) модель формоизменения трубы при прокатке на пилигримовом прокатном стане, корректно учитывающая несжимаемость металла. В рамках модели труба рассматривается как состоящая из четырёх участков, которые по-разному контактируют с прокатным инструментом. Сформулированы аналитические формулы и численные алгоритмы для вычисления формы пыльгерной головки на каждом участке, а также границ участков.

Ключевые слова: прокатка труб, пилигримовый стан, математическая модель, пыльгерная головка.

MATHEMATICAL MODEL OF TUBE FORMATION DURING ROLLING IN THE PILGER MILL

M.I. Gozman

JSC A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow

In the paper a mathematical (semi-analytical) model of tube rolling in a pilger mill is presented, which takes into account correctly the incompressibility of the metal. Within the model, the tube is considered as consisting of four sections that are in different contacts with the rolling tool. Analytical formulas and numerical algorithms are formulated to calculate the shape of the pilger cone in each section and the boundaries of the sections.

Keywords: tube rolling, pilger mill, mathematical model, pilger cone.

Введение

Прокатка труб – один из наиболее сложных, с физической точки зрения, технологических процессов обработки металла давлением. В процессе прокатки в трубе возникает сложное напряжённно-деформированное состояние, которое характеризуется существенно неоднородным и анизотропным, локализованным в узкой области распределением полей напряжений и деформаций в объёме трубы, которое к тому же

быстро меняется со временем. При этом труба также претерпевает нагрев, причём распределение температур в объёме трубы также существенно неоднородно, анизотропно и непостоянно во времени. Наконец, деформация значительно сказывается на микроструктуре трубы, приводя к формированию в ней текстуры, что влечёт изменение (в частности анизотропию) механических свойств материала.

Это комплексное воздействие на трубу связано с риском повреждения и формирования дефектов, таких как складчатость, раковины и риски, задиры, закаты и т. д. Одной из наиболее значимых причин является неоптимальный режим деформации. Так, если степень или скорость деформации чересчур велика или если слишком велико напряжение на поверхности (связанное с давлением или с трением трубы об инструмент), то это может привести к превышению предельно допустимых напряжений или деформаций в отдельных участках трубы, что влечёт появление дефектов. Таким образом, главная задача при прокатке состоит в обеспечении оптимального режима деформации, минимизирующего (а в идеале сводящего к нулю) вероятность появления дефектов.

Естественный подход к решению этой задачи состоит в эмпирическом подборе оптимальной калибровки и технологических параметров прокатки (скорость, угол поворота трубы, шаг подачи). Однако эмпирический подход упирается в проблемы высоких материальных и временных затрат на эксперименты, что влечёт потерю прибыли.

Решением этой проблемы является математическое моделирование процесса прокатки. Оно позволяет существенно ускорить и удешевить процесс оптимизации процесса прокатки, заменив продолжительные и дорогостоящие натурные эксперименты намного более дешёвыми (почти бесплатными) и сравнительно непродолжительными численными расчётами.

В связи с этим возник интерес к математическому моделированию прокатки как физического процесса. Суть математического моделирования состоит в вычислении напряжённо-деформированного состояния трубы (то есть распределения в ней полей напряжений и деформаций) исходя из физических принципов механики сплошных сред, а также условий прокатки, таких как профили калибров и оправки, скорость прокатки, шаг подачи, угол поворота, условия трения на границе труба-инструмент, режим охлаждения. Напряжённо-деформированное состояние трубы позволяет прогнозировать вероятное повреждение трубы при прокатке (а также возможный износ или повреждение инструмента).

Первые попытки аналитического моделирования процесса холодной прокатки предприняты Зибелем и Нойманом в 1954 [1] и Гелейи в 1958 [2], где используется аналогия с прокаткой полосы. В этих работах предлагается разбиение мгновенного очага деформации на два отрезка, на одном из которых труба соприкасается и с калибром, и с оправкой, а на другом – только с оправкой. Эти идеи широко использовались и в последующих работах. В данной работе такой подход тоже используется.

Обе представленные модели демонстрируют существенное отклонение расчётной длины зоны контакта и площади контакта, а также усилий прокатки от измерений, выполненных Йошидой и др. [3]. Йошида предложил упрощённую трёхмерную полуаналитическую модель процесса холодной прокатки, основанную на результатах его экспериментов. Путём измерения течения материала и толщины стенки трубы в различных точках поверхности с делительной сеткой при остановке процесса прокатки на разных этапах было измерено распределение деформаций в трубе. При этом было сделано предположение, что течение металла одинаково на внешней и внутренней поверхностях трубы, что означает пренебрежение сдвиговыми деформациями.

Позже Обэн [4] и Жирар [5] указали на необходимость учёта сдвиговой деформации для корректной оценки степени повреждения трубы при прокатке. Обэн с соавторами в работе [4] развили трёхмерную полуаналитическую модель, которая включала в рассмотрение некоторые явления, которые игнорировались другими, более ранними моделями. Их модель учитывала упругие деформации инструмента (калибров, оправки), а также волну. Модель основана на методе плоских сечений (т. н. «slab method» – см. [6, 7]).

Другая трёхмерная модель была построена Фуругеном и Хаяши [8]. В этой модели впервые была учтена осевая асимметрия обжатия трубы. Для учёта асимметрии обжатия сечение трубы в области её соприкосновения с валками было разделено на четыре участка, два из которых касаются вала, а два других не касаются. В 1992 Осика и соавторы [9, 10] развили двумерную и частично трёхмерную математическую модель холодной прокатки. Поперечное сечение и длина разделяются на мелкие элементы, после чего применяется метод расчётов, родственному методу конечных элементов. Авторы утверждают, что результаты их расчётов согласуются с данными экспериментов.

Следующий важный шаг развития аналитической теории прокатки был сделан в ряде работ Хумла, Линдегрена и Фогельхольма [11, 12]. Эта модель основана на приближении осевой симметрии. В этой модели форма трубы в зоне деформации задаётся аналитически в приближении осевой симметрии трубы, а зона пластической деформации трубы разделяется на зоны, примерно как в работе [1]. Это первая работа, в которой были учтены температурные эффекты. Усилие прокатки вычислялось методом плоских сечений.

В сравнительно недавней работе [13] предлагается метод приближённого описания формы трубы с учётом волны. При этом используется приближение осевой симметрии и плоского сечения, а также предположение, что внешний диаметр трубы один и тот же на передней и задней границах мгновенного очага деформации. В работах [14, 15] разработана аналитическая модель для вычисления площади контакта трубы с прокатным инструментом, а также нагрузки на прокатный инструмент при прокатке на трёхвалковом стане.

Главная проблема всех аналитических и полуаналитических моделей заключается в том, что они, ввиду сложности процесса, неизбежно включают целый ряд

приближений. Наиболее распространённые из них – это приближение осевой симметрии пильгерной головки (т.е. конусной части трубы, расположенной в очаге деформации), приближение плоского сечения (фактически означает пренебрежение сдвиговыми деформациями), пренебрежение температурными эффектами и анизотропией механических свойств материала. Все аналитические и полуаналитические модели включают в себя либо все, либо некоторые из этих приближений. Кроме того, эти модели не позволяют получить реалистичное распределение напряжений и деформаций в трубе и ограничиваются, как правило, вычислением усреднённого напряжения или деформации в некоторой области трубы (например в сечении или в части сечения).

В связи с развитием вычислительной техники интерес к аналитическим и полуаналитическим методам существенно ослаб. Современные ЭВМ позволяют намного точнее делать расчёты и получать намного более полную информацию о распределении напряжений и деформаций в деформируемом теле, чем это возможно с помощью старых моделей. Специально для таких задач был разработан метод конечных элементов, основанный на численном решении самосогласованной системы уравнений теории пластичности. Этот метод свободен от приближений и теоретически позволяет получать распределение напряжений и деформаций с любой требуемой точностью. Все современные программные продукты (MSC Marc, Ansys, Q-Form и др.), которые применяются для промышленных расчётов обработки металлов давлением, используют именно метод конечных элементов.

Но, несмотря на то что аналитические и полуаналитические методы расчёта напряжённо-деформированного состояния отошли на второй план, они всё ещё не потеряли своей актуальности. Это связано с тем, что метод конечных элементов требует больших временных затрат, а также больших объёмов машинной памяти. Как следствие, этот метод прекрасно подходит для единичных численных экспериментов. Но если задача состоит в том, чтобы найти оптимальную калибровку, то в этом случае требуется проведение большого количества численных экспериментов. В этом случае метод конечных элементов становится непрактичным.

Подход, который мы предлагаем для расчёта оптимальной калибровки, состоит в последовательном использовании приближённой полуаналитической модели и метода конечных элементов. Это позволит использовать преимущества и скомпенсировать недостатки обоих методов. Аналитические и полуаналитические модели отличаются быстродействием и подходят для многократных численных экспериментов, но не обладают высокой точностью. Метод конечных элементов, напротив, отличается точностью, но требует много времени для вычислений. В связи с этим представляется разумным разделить задачу на два этапа. На первом этапе полуаналитическая модель используется для построения профилей калибров и оправки, приближенных к оптимальным. Полученная калибровка используется как начальное приближение для метода конечных элементов, с помощью которого она уточняется. Это позволяет существенно снизить количество численных экспериментов, проводимых с помощью

метода конечных элементов, и тем самым получить качественный результат за сравнительно короткое время.

Настоящая работа посвящена разработке новой полуаналитической модели, которую мы планируем применить в нашем подходе. Новая модель отличается от старых тем, что более точно учитывает изменение формы пильгерной головки при движении калибров, а также использует уравнения механики сплошных сред для расчёта распределения напряжений в трубе.

Расчёт напряжённо-деформированного состояния при заданном положении валков проводится в два этапа. На первом этапе строится приближённая форма пильгерной головки, а на втором этапе вычисляется поле деформаций и напряжений путём прямого решения уравнений теории пластичности. При этом форма пильгерной головки, полученная на первом этапе, определяет граничные условия для уравнений, которые решаются на втором этапе.

Следует заметить, что уже само разделение вычисления напряжённо-деформированного состояния на два этапа представляет собой приближение. При точном решении задачи вычисление формы пильгерной головки и расчёт поля напряжений и деформаций неотделимы друг от друга и взаимно согласованы. Разделяя вычисление на два этапа, мы исходим из предположения, что форма пильгерной головки влияет на распределение напряжений и деформаций в трубе, а напряжения и деформации на форму пильгерной головки не влияют. Хотя это предположение, строго говоря, не верно, но оно оправдано тем, что форму пильгерной головки можно приближённо построить исходя из геометрии калибров и оправки, и форма трубы, рассчитанной таким способом, будет слабо отличаться от реальной.

В настоящей работе представлена первая часть масштабной работы по разработке полуаналитической модели и применению её, совместно с методом конечных элементов, для расчёта оптимальных калибровок для промышленного производства труб. Речь в данной работе идёт о формоизменении пильгерной головки в процессе прокатки. Формоизменение рассматривается как динамический процесс. Это значит, что представленная здесь модель позволяет получить форму пильгерной головки при любом положении калибров (а не только при крайнем правом и крайнем левом положениях) и описывать её изменение при смещении калибров, тем самым позволяя получить и приближённое распределение скорости течения металла при движении калибров.

Основные сведения о модели

Описание нашей модели начнём с того, что формально представим её входные параметры и результаты.

I. Формальное представление исходных данных

1. Продольную координату вдоль оси оправки будем обозначать z . Форма оправки задаётся функцией $R_{man}(z)$, которая определяет радиус оправки в сечении с продольной координатой z .
2. Положение точки на ручье калибра задаётся угловой координатой ϑ , которая отсчитывается по реборде (обозначения объясняются на рис. 1). Форма калибра описывается функцией $R_{cal}(\vartheta)$ зависимости радиуса калибра от угла ϑ .
3. Текущую z -координату оси калибра будем обозначать Z_C . Функция $\Theta(Z_C)$ задаёт связь между координатой оси калибра Z_C и углом Θ поворота калибра.
4. Y_C – расстояние между осью калибра и осью оправки. Эта величина постоянная и не меняется при движении калибров.
5. $R_{ex}^{(0)}, R_{in}^{(0)}$ – внешний и внутренний радиусы трубной заготовки.
6. Шаг подачи трубы обозначим m . Считаем, что подача осуществляется только перед прямым ходом калибров, то есть при крайнем левом положении калибров.¹

II. Формальное представление результатов

Задача вычисления формы пыльгерной головки состоит в построении двух функций $R_{ex}(z, Z_C), R_{in}(z, Z_C)$ – внешний и внутренний радиусы пыльгерной головки в сечении с продольной координатой z при текущем положении калибров Z_C .

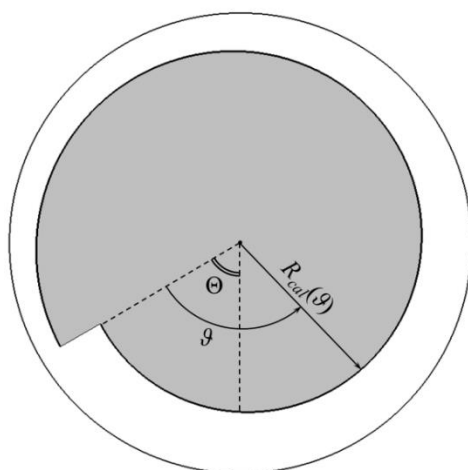


Рис. 1. Форма калибра

¹ Так часто бывает на практике. Однако для того, чтобы модель была универсальной, следовало бы рассмотреть случай, когда подача осуществляется как перед прямым, так и перед обратным ходом калибров. В этом случае алгоритм расчёта формы пыльгерной головки становится намного более сложным. Исследование такого случая мы планируем привести в нашей следующей работе.

III. Постулаты модели

Модель, которая используется для расчёта приближённой формы пыльгерной головки, основана на следующих предположениях:

1. Осевая симметрия пыльгерной головки в любой момент времени;
 2. Несжимаемость материала трубы;
 3. Приближение плоского сечения;
 4. Внешний диаметр сечения пыльгерной головки меняется только при соприкосновении внешней поверхности с калибрами;
 5. Толщина сечения пыльгерной головки меняется только при соприкосновении одновременно с калибрами и с оправкой;
 6. Упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с пластическими.
- Эти предположения образуют систему постулатов модели.

IV. Кривая калибра при заданном положении его оси

Если калибры находятся в положении Z_C и повернуты на угол Θ , то точки на его поверхности, которые касаются трубы (при условии, что касание имеет место), имеют угловую координату $\mathcal{G} \approx \Theta$. Можно с высокой степенью точности считать, что во всех этих точках радиус калибра имеет одно и то же значение $R_{cal}(\Theta)$. Тогда в зоне контакта трубы с калибром кривая ручья калибра описывается параметрически следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{cal}(\mathcal{G}) &= Y_C - R_{cal}(\Theta) \cos(\mathcal{G} - \Theta), \\ z_{cal}(\mathcal{G}) &= Z_C + R_{cal}(\Theta) \sin(\mathcal{G} - \Theta). \end{aligned} \quad (1)$$

После элементарных преобразований можно перейти от параметрического описания кривой ручья калибра к явному способу описания:

$$y_{cal}(z, Z_C) = Y_C - \sqrt{R_{cal}^2(\Theta) - (z - Z_C)^2}, \quad (2)$$

где угол поворота калибра Θ связан с координатой его оси Z_C функцией $\Theta(Z_C)$.

V. Продольная и объёмная координаты сечений

При расчёте формы пыльгерной головки мы, кроме продольной координаты z , используем также *объёмную координату* V , которая равна объёму трубы между её левым торцом (сечением с продольной координатой $z = 0$) и текущей продольной координатой. Продольная и объёмная координаты при положении калибра Z_C связаны между собой функцией $V(z, Z_C)$, которая определяется формулой

$$V(z, Z_C) = \pi \int_0^z (R_{ex}^2(z', Z_C) - R_{in}^2(z', Z_C)) dz'. \quad (3)$$

Согласно приближению несжимаемости материала трубы, объёмная координата некоторого сечения трубы остаётся неизменной в течение всего прохода калибров вдоль пильгерной головки и меняется только в момент подачи. То есть, если при крайнем левом положении калибров ($Z_C = 0$) продольная координата сечения равна z_0 , то значения продольной координаты z_1, z_2, z_3 этого же сечения при разных промежуточных положениях калибров Z_{C1}, Z_{C2}, Z_{C3} определяется исходя из равенства

$$V(z_0, 0) = V(z_1, Z_{C1}) = V(z_2, Z_{C2}) = V(z_3, Z_{C3}). \quad (4)$$

Таким образом, объёмная координата играет ключевую роль в расчётах текущей координаты каждого сечения при заданном положении калибров.

Расчёт формы трубы при заданном положении калибров

Для того чтобы вычислить форму трубы на каждом участке, требуется сначала определить её форму при двух крайних положениях калибров.

Форма трубы при крайнем правом положении калибров

Форма пильгерной головки при крайнем правом положении калибров $Z_C = L$ описывается функциями $R_{ex}^{(r)}(z) = R_{ex}(z, L)$ и $R_{in}^{(r)}(z) = R_{in}(z, L)$ (рис. 2).

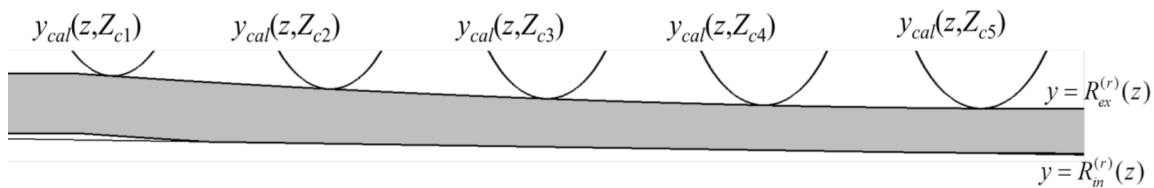


Рис. 2. Форма пильгерной головки при крайнем правом положении калибров как общая огибающая кривых калибра при разных положениях

Начнём с описания способа построения функции $R_{ex}^{(r)}(z)$.

Как показано на рис. 2, кривая $y = R_{ex}^{(r)}(z)$ представляет собой общую огибающую семейства кривых $y = y_{cal}(z, Z_{C1}), y = y_{cal}(z, Z_{C2}), y = y_{cal}(z, Z_{C3}), \dots$, которые описывают

форму ручья калибра при разных положениях калибра $Z_{C1}, Z_{C2}, Z_{C3}, \dots$. Построение кривой $y = R_{ex}^{(r)}(z)$ выполняется по следующему алгоритму:

1. Выбираем массив значений координаты оси калибра $Z_{Ci}, i = 1, 2, \dots, N$.
2. Для каждого значения Z_{Ci} находим координату z_i касания кривой $y = R_{ex}^{(r)}(z)$ с кривой $y = y_{cal}(z, Z_{Ci})$, используя следующее уравнение (см. Приложение):

$$\frac{\partial y_{cal}}{\partial Z_C}(z_i, Z_{Ci}) = 0 \quad (5)$$

Подставляя сюда формулу (2), получаем

$$\frac{R_{cal}(\Theta_i) \frac{dR_{cal}}{d\Theta}(\Theta_i) \frac{d\Theta}{dZ_C}(Z_{Ci}) + z_i - Z_{Ci}}{\sqrt{R_{cal}^2(\Theta_i) - (z_i - Z_{Ci})^2}} = 0 \quad (6)$$

где $\Theta_i = \Theta(Z_{Ci})$. Отсюда получается явное выражение для координаты z_i касания кривой $y = R_{ex}^{(r)}(z)$ с кривой калибра, когда ось калибра расположена в точке с координатой Z_{Ci} :

$$z_i = Z_{Ci} - R_{cal}(\Theta_i) \frac{dR_{cal}}{d\Theta}(\Theta_i) \frac{d\Theta}{dZ_C}(Z_{Ci}) \quad (7)$$

3. Для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ находим $R_{ex}^{(r)}(z_i) = y_{cal}(z_i, Z_{Ci})$.
4. Таким образом, получен набор значений продольной координаты z_i и значение функции $R_{ex}^{(r)}(z_i)$ в этих координатах. Построить функцию $R_{ex}^{(r)}(z)$ для всех z можно, используя любой алгоритм интерполяции.

Обоснование этого алгоритма приведено в Приложении.

Полученную функцию $R_{ex}^{(r)}(z)$ необходимо ещё модифицировать, учитывая, что при малых значениях z калибр не соприкасается с трубой. Поэтому при таких z , при которых $R_{ex}^{(r)}(z) > R_{ex}^{(0)}$, где $R_{ex}^{(0)}$ – внешний радиус заготовки, нужно положить $R_{ex}^{(r)}(z) = R_{ex}^{(0)}$.

Заметим, что на практике профиль внешней поверхности пыльгерной головки при крайнем правом положении валков отождествляют с развёрткой калибра. Формально это означает, что вместо формулы (7) используют более простую формулу: $z_i = Z_{Ci}$. Формула (7) позволяет, таким образом, более точно определить форму пыльгерной головки при крайнем правом положении калибра.

Перейдём теперь к построению функции $R_{in}^{(r)}(z)$.

Сначала строим функцию $t^{(r)}(z)$, которая определяет толщину стенки пыльгерной головки в сечении с продольной координатой z при крайнем правом положении калибров. Она строится по следующей схеме:

1. Выбираем набор значений продольной координаты z , расположенных достаточно близко друг к другу: $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N = L$.
2. В точке $z = 0$ толщина стенки трубы при крайнем правом положении калибров равна толщине стенки заготовки: $t^{(r)}(0) = R_{ex}^{(0)} - R_{in}^{(0)}$.
3. Если толщина стенки $t^{(r)}(z_i)$ в сечении с продольной координатой z_i известна, то толщина стенки $t^{(r)}(z_{i+1})$ в сечении с продольной координатой z_{i+1} определяется по формуле

$$t^{(r)}(z_{i+1}) = \min \left\{ R_{ex}^{(r)}(z_{i+1}) - R_{man}(z_{i+1}), t^{(r)}(z_i) \right\}. \quad (8)$$

4. Таким образом, мы последовательно получаем толщину стенки $t^{(r)}(z_i)$ во всех сечениях с продольными координатами z_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Получить функцию $t^{(r)}(z)$ можно, используя любой алгоритм интерполяции.

После этого функция $R_{in}^{(r)}(z)$ строится по формуле

$$R_{in}^{(r)}(z) = R_{ex}^{(r)}(z) - t^{(r)}(z). \quad (9)$$

Форма трубы при крайнем левом положении калибров

Форма пыльгерной головки при крайнем левом положении калибров $Z_C = 0$ перед прямым ходом (после подачи) описывается функциями $R_{ex}^{(l)}(z) = R_{ex}(z, 0)$, $R_{in}^{(l)}(z) = R_{in}(z, 0)$. Они связаны с функциями $R_{ex}^{(r)}(z)$, $R_{in}^{(r)}(z)$ простыми соотношениями:

$$R_{ex}^{(l)}(z) = \begin{cases} R_{ex}^{(0)}, & \text{если } z < m, \\ R_{ex}^{(r)}(z - m), & \text{если } z \geq m, \end{cases} \quad (10)$$

$$R_{in}^{(l)}(z) = \begin{cases} R_{in}^{(0)}, & \text{если } z < m, \\ R_{in}^{(r)}(z - m), & \text{если } z \geq m, \end{cases} \quad (11)$$

где m – шаг подачи.

Объяснение формул (10) и (11) просто. В задаче, которая рассматривается в этой работе, предполагается, что подача трубы осуществляется только при крайнем левом положении калибров. Это значит, что при обратном ходе калибров (из крайнего правого положения в крайнее левое) калибры проходят по трубе, которая имеет форму общей огибающей всех кривых $y = y_{cal}(z, Z_{C1})$, $y = y_{cal}(z, Z_{C2})$, $y = y_{cal}(z, Z_{C3})$, При этом, очевидно, труба не деформируется.² Следовательно, форма трубы после обратного хода калибров совпадает с её формой после прямого хода (т. е. при крайнем правом положении калибров). Перед прямым ходом осуществляется подача трубы на шаг подачи m . Таким образом, форма трубы перед прямым ходом калибров совпадает с формой трубы после обратного хода (или после прямого хода, что то же самое) с учётом подачи. Это и приводит к формулам (10), (11).

При вычислении формы пыльгерной головки при промежуточном положении калибров нам потребуется функция $t^{(l)}(V)$ – зависимость толщины стенки трубы от объёмной координаты, а также функция $R_{ex}^{(l)}(V)$ – зависимость внешнего радиуса трубы от объёмной координаты. Всё, что для этого нужно, – это установить связь между продольной координатой z и объёмной координатой V для пыльгерной головки, форма которой определяется функциями $R_{ex}^{(l)}(z)$, $R_{in}^{(l)}(z)$. Для этого применяется формула

$$V(z) = \pi \int_0^z \left\{ \left(R_{ex}^{(l)}(z') \right)^2 - \left(R_{in}^{(l)}(z') \right)^2 \right\} dz'. \quad (12)$$

После этого можно вычислить обратную функцию $z(V)$. Тогда

$$t^{(l)}(V) = R_{ex}^{(l)}(z(V)) - R_{in}^{(l)}(z(V)), \quad (13)$$

$$R_{ex}^{(l)}(V) = R_{ex}^{(l)}(z(V)). \quad (14)$$

Форма пыльгерной головки при произвольном положении калибра

На Рис. 3 показано, что при промежуточном положении калибров Z_C трубу можно разделить на четыре участка:

- $0 \leq z < z_A$ – участок трубы, уже подвергшийся деформации на данном проходе валков;

² Заметим, что это верно только в рамках допущений нашей модели. В реальности форма трубы после прямого хода калибров может немного отличаться от формы общей огибающей кривых калибров в разных положениях. Это объясняется, во-первых, затуханием упругих деформаций после того, как калибры достигают крайнего положения, где их воздействие на пыльгерную головку прекращается. Во-вторых, между трубой и прокатным инструментом (калибрами, оправкой) действует трение, что также приводит к отклонению реальной формы пыльгерной головки от расчётной. Эти эффекты приводят к тому, что деформация трубы происходит не только на прямом, но и на обратном проходе калибров.

- $z_A \leq z < z_Q$ – участок трубы, касающийся одновременно и калибров, и оправки;
- $z_Q \leq z \leq z_B$ – участок трубы, касающийся калибра, но не оправки;
- $z_B < z$ – участок трубы, ещё не пройденный калибрами.

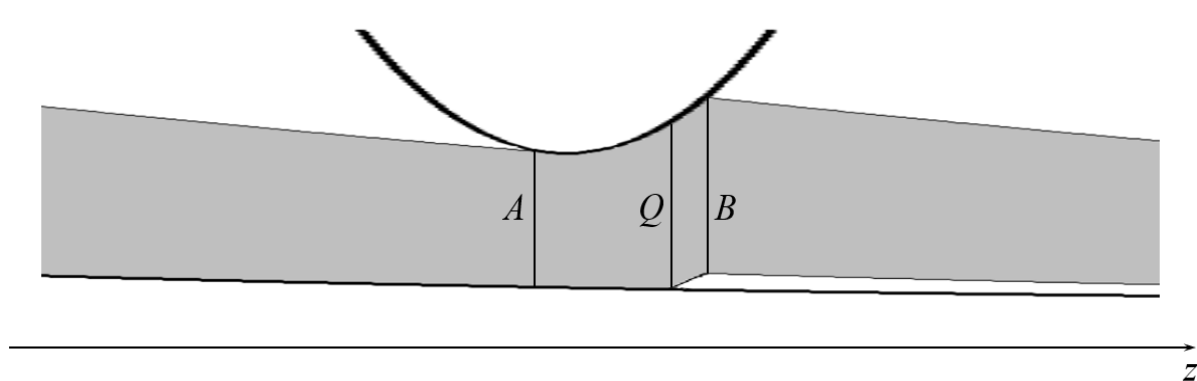


Рис. 3. Разделение трубы на участки

Здесь z_A , z_Q и z_B – продольные координаты сечений A , Q и B , которые являются границами участков. Очевидно, что эти сечения меняются при перемещении калибров, поэтому их продольные координаты зависят от положения Z_C калибров. Эту зависимость мы будем описывать функциями $z_A(Z_C)$, $z_Q(Z_C)$ и $z_B(Z_C)$. Алгоритмы построения этих функций будут изложены ниже. Также нам потребуются обозначения V_A , V_Q и V_B для объёмных координат сечений A , Q и B . Эти объёмные координаты также зависят от положения калибров, и соответствующие зависимости мы будем описывать функциями $V_A(Z_C)$, $V_Q(Z_C)$ и $V_B(Z_C)$.

Рассмотрим каждый участок по отдельности.

I. На участке $z < z_A$ форма трубы совпадает с формой пыльгерной головки, претерпевшей прокатку, то есть

$$\begin{aligned} R_{ex}(z, Z_C) &= R_{ex}^{(r)}(z), \\ R_{in}(z, Z_C) &= R_{in}^{(r)}(z). \end{aligned} \quad (15)$$

II. Сечение A , очевидно, соответствует точке касания внешней поверхности трубы в области $z < z_A$ с кривой калибра при его заданном положении Z_C . Это значит, что её продольная координата z_A определяется из соотношения

$$R_{ex}^{(r)}(z_A) = y_{cal}(z_A, Z_C). \quad (16)$$

III. На участке $z_A \leq z < z_Q$, очевидно,

$$\begin{aligned} R_{ex}(z, Z_C) &= y_{cal}(z, Z_C), \\ R_{in}(z, Z_C) &= R_{man}(z). \end{aligned} \quad (17)$$

IV. Вычисление координаты z_Q сечения Q представляет некоторые трудности. Для этого используется следующая процедура:

1. Выбирается «предполагаемое» сечение $Q?$, расположенное достаточно далеко от точки A , чтобы можно было быть уверенным, что $z_A < z_Q < z_{Q?}$.
2. Строится «предполагаемая» форма пыльгерной головки, которая касается и калибров, и оправки при всех $z_A < z < z_{Q?}$. Внешний и внутренний радиусы «предполагаемой» формы пыльгерной головки обозначим $R_{ex?}(z, Z_C)$ и $R_{in?}(z, Z_C)$. Очевидно, они задаются формулами

$$\begin{aligned} R_{ex?}(z, Z_C) &= y_{cal}(z, Z_C), \\ R_{in?}(z, Z_C) &= R_{man}(z), \end{aligned} \quad (18)$$

для $z_A < z < z_{Q?}$. На отрезке $z_A < z < z_{Q?}$ «предполагаемая» форма пыльгерной головки совпадает с истинной формой³.

3. Пользуясь формулой (3), строим функцию $V = V?(z)$, связывающую продольную и объёмную координаты пыльгерной головки «предполагаемой» формы, и соответствующую обратную функцию $z = z?(V)$.
4. Строим функцию $t?(V)$ зависимости толщины пыльгерной головки «предполагаемой» формы от объёмной координаты по формуле

$$t?(V) = R_{ex?}(z?(V), Z_C) - R_{in?}(z?(V), Z_C). \quad (19)$$

5. При некотором значении объёмной координаты V толщина сечения пыльгерной головки «предполагаемой» формы совпадает с толщиной сечения пыльгерной головки перед прямым ходом калибров, форма которой описывается функциями $R_{ex}^{(l)}(z)$, $R_{in}^{(l)}(z)$. Из постулата 5 модели следует, что именно это значение объёмной координаты V и отвечает сечению Q . Таким образом, объёмную координату V_Q сечения Q можно получить из уравнения

$$t?(V_Q) = t^{(l)}(V_Q). \quad (20)$$

³ Под «истинной формой» мы подразумеваем, разумеется, форму, согласующуюся с постулатами модели. Поскольку модель является приближённой, то эту форму трубы нельзя назвать истинной в буквальном смысле слова.

- б. Продольная координата z_Q сечения Q определяется с помощью функции $z = z_\gamma(V)$ по очевидной формуле

$$z_Q = z_\gamma(V_Q). \quad (21)$$

V. На участке $z_Q < z < z_B$ внешняя поверхность пыльгерной головки совпадает с поверхностью калибра (как и в области $z_A < z < z_Q$):

$$R_{ex}(z, Z_C) = y_{cal}(z, Z_C). \quad (22)$$

Форма внутренней поверхности пыльгерной головки в этой области определяется по следующей схеме.

Согласно постулату 5 модели, толщина стенки в сечении с объёмной координатой V совпадает с толщиной стенки в сечении с той же объёмной координатой для пыльгерной головки до прохода калибров, то есть

$$t(V, Z_C) = t^{(l)}(V). \quad (23)$$

Пусть сечение 1 с продольной и объёмной координатами z и V и близкое к нему сечение 2 с продольной и объёмной координатами $z + dz$ и $V + dV$ лежат в области $z_Q < z < z_B$. Внешний и внутренний радиусы трубы в этих сечениях будем обозначать соответственно $R_{ex1}, R_{in1}, R_{ex2}, R_{in2}$. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} R_{ex1} &= y_{cal}(z, Z_C), & R_{in1} &= R_{ex1} - t^{(l)}(V), \\ R_{ex2} &= y_{cal}(z + dz, Z_C), & R_{in2} &= R_{ex2} - t^{(l)}(V + dV). \end{aligned} \quad (24)$$

Формулу для R_{ex2} можно с точностью до первого порядка по dV переписать в виде

$$R_{in2} = R'_{in2} - \frac{dt^{(l)}}{dV}(V) dV, \quad (25)$$

где $R'_{in2} = R_{ex2} - t^{(l)}(V)$.

Объём dV между сечениями 1 и 2 можно записать как разность объёмов двух усечённых конусов, основаниями которых являются сечения 1 и 2, а боковую поверхность образуют внешняя и внутренняя поверхности трубы соответственно:

$$dV = \frac{\pi}{3} (R_{ex1}^2 + R_{ex1}R_{ex2} + R_{ex2}^2 - R_{in1}^2 - R_{in1}R_{in2} - R_{in2}^2). \quad (26)$$

Подставляя в правую часть формулы (24) и (25) и раскладывая полученное выражение в ряд по dV с точностью до первого порядка, мы приводим (26) к виду $3/\pi \cdot dV = a + b \cdot dV$, где a и b выражаются через $R_{ex1}, R_{in1}, R_{ex2}, R'_{in2}$ и $dt^{(l)}/dV(V)$. Полученная формула представляет собой уравнение, из которого можно выразить $dV = a/(3/\pi - b)$. Опуская все промежуточные выкладки, запишем окончательную формулу:

$$dV = \frac{R_{ex1}^2 + R_{ex1}R_{ex2} + R_{ex2}^2 - R_{in1}^2 - R_{in1}R'_{in2} - R_{ex2}^2}{\frac{3}{\pi} - (R_{in1} - 2R'_{in2}) \frac{dt^{(l)}}{dV}(V)} \quad (27)$$

С помощью формулы (27) мы можем построить функции $z = z(V, Z_C)$ и $V = V(z, Z_C)$, связывающие между собой продольную и объёмную координаты сечений на участке $z_Q < z < z_B$. Для этого выделим в отрезке $z_Q < z < z_B$ набор сечений $z_Q = z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_{N-1} < z_N = z_B$. На текущем этапе расчётов объёмная координата V_Q сечения Q нам уже известна (она определяется из уравнения (20)). Пользуясь формулой (27), мы можем получить сначала объёмную координату V_2 сечения z_2 , затем объёмную координату V_3 сечения z_3 , затем объёмную координату V_4 сечения z_4 и т. д. Таким образом, мы получаем набор значений V_i объёмной координаты в сечениях $z_i, i = 1, 2, \dots, N$. Получить функцию $V = V(z)$ или $z = z(V)$ можно, применяя любой метод интерполяции. Далее можно получить толщину стенки трубы в отрезке $z_Q < z < z_B$ по формуле

$$t(z, Z_C) = t^{(l)}(V(z)), \quad (28)$$

а форма внутренней поверхности трубы определяется формулой $R_{in}(z, Z_C) = R_{ex}(z, Z_C) - t(z, Z_C)$.

VI. Трудность применения алгоритма, описанного в пункте V, состоит в том, что на данном этапе расчётов продольная координата сечения B ещё не известна, поэтому трудно выбрать набор сечений z_i . Для того чтобы применить этот алгоритм, нужно сначала определить продольную координату сечения B .

Решение состоит в том, чтобы выбрать некоторую «предполагаемую» точку $B?$ (лежит достаточно далеко от точки Q) так, чтобы можно было с уверенностью сказать, что истинная точка B расположена левее «предполагаемой» точки $B?$, $z_B < z_{B?}$. Таким образом, пользуясь приведённым в этом пункте алгоритмом, мы построим «предполагаемую» форму пыльгерной головки на участке $z_Q < z < z_{B?}$, считая, что всюду на этом участке пыльгерная головка соприкасается с калибром, но не соприкасается с оправкой. «Предполагаемая» форма пыльгерной головки, полученная на отрезке $z_Q < z < z_{B?}$, совпадает с истинной формой трубы на отрезке $z_Q < z < z_B$.

«Предполагаемая» форма пильгерной головки на участке $z_Q < z < z_B$ записывается в виде функций $R_{ex}(z, Z_C)$ и $R_{in}(z, Z_C)$. Выражая продольные координаты сечений через их объёмные координаты, можно описать «предполагаемую» форму пильгерной головки также в виде функций $R_{ex}(V, Z_C)$ и $R_{in}(V, Z_C)$.

Теперь продольная координата сечения B определяется следующим образом.

При некотором значении объёмной координаты V внешний радиус трубы совпадает с внешним радиусом пильгерной головки до прохода калибров. Из постулата 4 модели следует, что именно это значение объёмной координаты V и отвечает сечению B . Таким образом, объёмную координату V_B сечения B можно получить из уравнения

$$R_{ex}(V_B) = R_{ex}^{(l)}(V_B). \quad (29)$$

Продольная координата z_B сечения B определяется с помощью функции $V(z)$ для «предполагаемой» формы трубы на отрезке $z_Q < z < z_B$ из уравнения $V(z_B) = V_B$.

VII. Форма трубы в области $z > z_B$ совпадает с формой трубы при крайнем левом положении калибров, то есть, $R_{ex}(V, Z_C) = R_{ex}^{(l)}(V)$, $R_{in}(V, Z_C) = R_{in}^{(l)}(V)$ при $V > V_B$.

Функции $R_{ex}(z, Z_C)$, $R_{in}(z, Z_C)$ при $z > z_B$ можно построить следующим образом. Обозначим z'_B продольную координату сечения с объёмной координатой V_B при крайнем левом положении калибров (перед прямым ходом). Найти z'_B можно, используя методики, описанные выше. При деформации области трубы, где $V < V_B$, точка B переместилась из координаты z'_B в координату z_B . Отсюда автоматически следует, что в области $z > z_B$

$$\begin{aligned} R_{ex}(z, Z_C) &= R_{ex}^{(l)}(z - z_B + z'_B), \\ R_{in}(z, Z_C) &= R_{in}^{(l)}(z - z_B + z'_B). \end{aligned} \quad (30)$$

Выводы

Построена математическая модель для приближённого расчёта формоизменения пильгерной головки в процессе прокатки трубы на пилигримовом прокатном стане. Основная идея модели состоит в том, что труба разделяется на четыре участка, которые по-разному контактируют с калибрами и оправкой. Форма пильгерной головки на каждом участке, а также положения границ между участками определяются отдельно по строгим алгоритмам, которые выводятся из постулатов модели. К важным особенностям модели можно отнести то, что она корректно определяет форму пильгерной головки исходя из заданных профилей калибров и оправки, а также строго учитывает несжимаемость материала трубы.

Представленная в данной статье модель является первой частью крупного исследования, направленного на разработку метода расчёта оптимальной калибровки, обеспечивающей высокое качество готовых труб. Помимо расчётов формы пилигримовой головки, метод будет включать также вычисление напряжённо-деформированного состояния и степени повреждения трубы с помощью приближённой полуаналитической модели, пригодной для многократных численных экспериментов, и с помощью времязатратного, но точного метода конечных элементов. Эти задачи будут освещены в следующих работах.

Приложение – общая огибающая семейства кривых

Пусть на плоскости Oxy задано семейство кривых $y = u_a(x)$, которые различаются значением параметра a , пробегающего непрерывный ряд значений от a_{min} до a_{max} . Требуется построить кривую $y = v(x)$, которая будет общей огибающей для всего семейства кривых $y = u_a(x)$.

Обозначим $X(a)$ значение координаты x , в которой кривая $y = v(x)$ касается кривой $y = u_a(x)$. Это значит, что выполняются равенства

$$v(X(a)) = u_a(X(a)), \quad (1a)$$

$$\frac{dv}{dx}(X(a)) = \frac{\partial u_a}{\partial x}(X(a)). \quad (2a)$$

Рассмотрим выражение $v(X(a+da)) - v(X(a))$, где da – малое приращение параметра a . Используя равенства (1a) и (2a), можно получить, с одной стороны,

$$v(X(a+da)) - v(X(a)) = da \frac{dX}{da}(a) \frac{dv}{dx}(X(a)) = da \frac{dX}{da}(a) \frac{\partial u_a}{\partial x}(X(a)), \quad (3a)$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} v(X(a+da)) - v(X(a)) &= u_{a+da}(X(a+da)) - u_a(X(a)) = \\ &= da \frac{dX}{da}(a) \frac{\partial u_a}{\partial x}(X(a)) + da \frac{\partial u_a}{\partial a}(X(a)). \end{aligned} \quad (4a)$$

Приравняв (3a) и (4a) и сокращая da , получаем простое равенство:

$$\frac{\partial u_a}{\partial a}(X(a)) = 0. \quad (5a)$$

Равенство (5a) – это уравнение, из которого можно получить функцию $X(a)$. После этого общая огибающая определяется с помощью первого уравнения (1a).

Список литературы

1. Siebel E., Neumann F. W. *Das kaltpilgern von rohren-versuchergebniße und untersuchungen über dem walzvorgang* // *Stahl und Eisen*. 1954. Vol. 74. P. 139-145.
2. Geleji A. *Die Berechnung der Kräfte und des Leistungsbedarfs beim Kaltpilgern von Rohren* // *Acta Techn. Ac. Sci. Hung. Budapest*. 1955. Vol. 11. P. 461-478.
3. Yoshida H., Matsui T., Otani T., Mandai K., Kudo H. *Experimental investigation of the cold pilgering of copper tubes* // *Ann CIRP*. 1975. Vol. 24. P. 191-196.
4. Aubin J. L., Girard E., Montmitonnet P. *Modeling of damage in cold pilgering* // *Zirconium in the Nuclear Industry: Tenth International Symposium, ASTM STP*. 1994. P. 245-263.
5. Girard E., Guillén R., Weisbecker P., François M. *Effect of plastic shearing on damage and texture on Zircaloy-4 cladding tubes: Experimental and numerical study* // *J. Nucl. Mater.* 2001. Vol. 294. P. 330-338.
6. Foster A. D., Copeland T. J., Cox C. J., Hall P. W., Watkins M. A., Wright R., Lin J. *Error analysis and correction in the slab method for determining forming forces* // *International Journal of Mechanical Engineering Education*. 2009. Vol. 37. №4.
7. Tzou G. Y., Hsu H. H., Hsiao Y. H. *Investigation of a slab method analysis and FEM simulation on rotating compression forming of ring* // *J. Materials Processing Technology*. 2006. Vol. 177. P. 150–153.
8. Furugen M., Hayashi C. *Application of the theory of plasticity of the cold pilgering of tubes* // *Journal of Mechanical Working Technology*. 1984. Vol. 10. P. 273-286.
9. Osika J., Libura W. *Mathematical model of tube cold rolling in pilger mill* // *J. Mater. Process. Technol.* 1992. Vol. 34. P. 325-332.
10. Osika J., Palkowski H., Swiatkowski K., Pocięcha D., Kula A. *Analysis of material deformation during the new cold tube rolling process realized on the new generation of pilger mills* // *Arch. Metall. Mater.* 2009. Vol. 54 P. 1239-1251.
11. Huml P., Fogelholm R., Salwén A. *Optimization of Cold Rolling of Precision Tubes* // *CIRP Ann. Manuf. Technol.* 1993. Vol. 42. P. 283-286.
12. Huml P., Fogelholm R. *Simulation model of cold pilgering* // *J. Mater. Process. Technol.* 1994. Vol. 42. P. 167-173.
13. Lee S.-K., Lee K.-H. *Profile Design of the Grooved Die and Rolling Force Prediction in the Cold Pilger Rolling Process* // *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11, P. 11265.
14. Wei Zh., Wu Ch. *A new analytical model to predict the profile and stress distribution of tube in three-roll continuous retained mandrel rolling* // *Journal of Materials Processing Technology*. 2022. Vol. 302. P. 117491.
15. Wei Zh., Wu Ch. *New Analytical Model for Determining the Roll Pitch Diameter in Three-Roll Continuous Retained Mandrel Rolling* // *Metals*. 2023. Vol. 13. P. 304.